# 13 Arbeit und potentielle Energie (A)

## 13–1 Die Energie eines fallenden Körpers

In Kapitel 4 haben wir die Energieerhaltung diskutiert. Bei dieser Diskussion haben wir die Newtonschen Gesetze nicht benutzt. Aber es ist natürlich von großem Interesse, zu zeigen, wie es zustande kommt, daß die Energie tatsächlich in Übereinstimmung mit diesen Gesetzen erhalten bleibt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden wir mit dem einfachst möglichen Beispiel beginnen und dann schwerere und schwerere Beispiele entwickeln.

Das einfachste Beispiel der Energieerhaltung ist ein vertikal fallendes Objekt, eines, das sich nur in vertikaler Richtung bewegt. Ein Objekt, welches seine Höhe allein unter dem Einfluß der Gravitation ändert, hat aufgrund seiner Fallbewegung die kinetische Energie $T$ (oder K.E.) und eine potentielle Energie $mgh$, abgekürzt $U$ oder P.E. Die Summe beider ist konstant:

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot m\cdot v^2}_{\text{K.E.}} + \underbrace{mgh}_{\text{P.E.}} = \text{konstant}$$

oder

$$T + U = \text{konstant}. \tag{13.1}$$

Nun möchten wir zeigen, daß diese Aussage wahr ist. Was meinen wir damit: Zeigen, daß es wahr ist? Mit dem zweiten Newtonschen Gesetz können wir leicht sagen, wie sich das Objekt bewegt, und es ist leicht herauszufinden, wie sich die Geschwindigkeit mit der Zeit ändert. Sie wächst proportional mit der Zeit, und die Höhe ändert sich mit dem Quadrat der Zeit. Wenn wir also die Höhe von einem Nullpunkt aus messen, an dem sich das Objekt in Ruhe befindet, so ist es kein Wunder, daß die Höhe gleich dem Geschwindigkeitsquadrat mal einer Anzahl von Konstanten ist. Jedoch wollen wir dies ein wenig näher betrachten.

Wir finden *direkt* aus dem zweiten Newtonschen Gesetz, wie sich die kinetische Energie ändern sollte, indem wir die Ableitung der kinetischen Energie nach der Zeit bilden und dann das Newtonsche Gesetz anwenden. Wenn wir $(\frac{1}{2})\cdot m\cdot v^2$ nach der Zeit differenzieren, erhalten wir

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = \tfrac{1}{2}m2v\,\frac{dv}{dt} = mv\,\frac{dv}{dt}, \tag{13.2}$$

weil $m$ als konstant angenommen wird. Aber aus dem zweiten Newtonschen Gesetz folgt $m\cdot(dv/dt) = F$, so daß

$$dT/dt = Fv. \tag{13.3}$$

Für den allgemeinen Fall ergibt sich $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$, aber in unserem eindimensionalen Fall lassen wir es als Kraft mal Geschwindigkeit.

Nun ist in unserem einfachen Beispiel die Kraft konstant, gleich $-mg$, eine vertikale Kraft (das Minuszeichen zeigt, daß sie nach unten gerichtet ist), und die Geschwindigkeit ist natürlich die zeitliche Änderung der vertikalen Position oder der Höhe $h$. Also ist die zeitliche Änderung der kinetischen Energie gleich $-mg(dh/dt)$. Und diese Größe, Wunder über Wunder, ist die zeitliche Änderung von etwas anderem! Es ist die zeitliche Änderung von $mgh$! Also sind im Verlaufe der Zeit die Änderungen der kinetischen Energie und der Größe $mgh$ gleichgroß und entgegengesetzt, so daß die Summe beider Größen konstant bleibt; q.e.d.